BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Septiembre 2010

OPCIÓN A

Problema A.1.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. (*4 puntos*).
b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. (*3 puntos*).
c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. (*3 puntos*).

Problema A.2. Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $O=(0,0,0)$, $A=(6,-3,0)$ y $B=(3,0,1)$. (*3 puntos*).
b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P=(8,7,-2)$ y es perpendicular al plano π. (*3 puntos*).
c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P. (*4 puntos*).

Problema A.3. Dadas las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$. (*3 puntos*).
b) Demostrar que $f(x)\geq g(x)$ cuando $x\geq 0$. (*3 puntos*).
c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. (*4 puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Dadas las matrices $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(y)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. *(4 puntos).*

b) Calcular razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. *(2 puntos).*

c) Demostrar que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y. *(4 puntos).*

Problema B.2. Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones

$$r: \frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=z-4 \qquad \text{y} \qquad s: x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},$$

se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s. *(3 puntos).*

b) El ángulo que forman las rectas r y s. *(3 puntos).*

c) Ecuación implícita $Ax+By+Cz+D=0$ del plano π que contiene a las rectas r y s. *(4 puntos).*

Problema B.3. Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro (0,0) y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto $A=(-5,0)$. Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia $B=(x,y)$ y $C=(x,-y)$. Se pide obtener razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x. (*3 puntos*).

b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. (*5 puntos*).

c) El valor máximo del área del triángulo. (*2 puntos*).

Septiembre 2010

Opción A

1

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x+\alpha^3 y+z=1 \\ \alpha x+\alpha y+z=1 \\ \alpha^3 x+\alpha y+z=1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha^3 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A (first three columns), A' (whole matrix)

$\alpha=0$
$\alpha=1$
$\alpha=-1$

$$|A|=\alpha^2+\alpha^2+\alpha^6-\alpha^4-\alpha^2-\alpha^4=\alpha^6-2\alpha^4+\alpha^2=$$

$$=\alpha^2(\alpha^4-2\alpha^2+1)=0$$

a) $\alpha\neq -1,0,1$ rango $A=3$ rango $A'=3$ nº incógnitas $=3$

SCD.

b)
c) $\alpha=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2=F_1 \\ F_3=F_1 \end{array}$$

rango$A=1$
rango $A'=1$
nº icógnitas $=3$
SCI

$z=1$
$x=\lambda$
$y=\beta$

$\alpha=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2=F_1 \\ F_3=F_1 \end{array}$$

rango $A=1$
rango $A'=1$
nº incógnitas $=3$
SCI

$x=\lambda$
$y=\beta$
$z=1-\lambda-\beta$

$\alpha = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow F_2 = F_1 \\ \rightarrow F_3 = F_1 \end{array}$$

rango $A = 1$
rango $A' = 1$
nº incógnitas $= 3$
SCI

$x = \lambda$
$y = \beta$
$z = 1 + \lambda + \beta$

2 a) $\pi \begin{cases} O = (0,0,0) \\ A = (6,-3,0) \\ B = (3,0,1) \end{cases}$

$\vec{OA} = (6,-3,0)$
$\vec{OB} = (3,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & +1 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi \equiv -3x + 9z - 6y = 0$

b) $r \begin{cases} P = (8,7,-2) \\ \perp \pi \end{cases}$ $\quad \vec{n_\pi} = \vec{v_r} = (-3,-6,9)$ $\quad r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda + 8 \\ y = -6\lambda + 7 \\ z = 9\lambda - 2 \end{cases}$

c) $d(Q_\pi, P) < d(\pi, P)$ Nos piden el punto de intersección de la recta r con el plano π.

$-3(-3\lambda+8) - 6(-6\lambda+7) + 9(9\lambda-2) = 0$

$+9\lambda - 24 + 36\lambda - 42 + 81\lambda - 18 = 0$

$126\lambda - 84 = 0$

$\lambda = 2/3$

$x = 6$
$y = 3$
$z = 4$

$Q(6,3,4)$

3 $f(x) = x^3 \qquad g(x) = 2x^2 - x$

a) $x^3 = 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x = 0$

$x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x = 0 \quad y = 0 \quad A(0,0)$

$x = 1 \quad y = 1 \quad B(1,1)$

b) $f(x) \geq g(x) \quad x \geq 0$

$x^3 \geq 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$

$x(x-1)^2 \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ se cumple la hipótesis.

c) $\int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1/12 \; u^2$

Opción B

1

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = 6$

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 3 \\ x & 6 & 2 \\ x & 8 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 6 = 6 \qquad x = 6$$

b) $|2A| = 2^3 |A| = 2^3 \cdot 6 = 48$

c) $|B| = 0$

$$|B| = \begin{vmatrix} y & 4 & 3 \\ y & 6 & 2 \\ y & 8 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{} 0 + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{} 0 = 0 \qquad B^{-1} = \frac{B_{adj}^T}{|B|}$$

Cuando el determinante es 0, no existe inversa.

2) $r = \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \qquad s = x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

a) $P(X)$

$r = \begin{cases} x = 3\lambda + 4 \\ y = 2\lambda + 4 \\ z = \lambda + 4 \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 3\alpha \end{cases} \qquad P(1,2,3)$

$\left.\begin{array}{l} 3\lambda+4=\alpha \\ 2\lambda+4=2\alpha \\ \lambda+4=3\alpha \end{array}\right] \begin{array}{l} 2(3\lambda+4) = 2\lambda+4 \\ 6\lambda+8=2\lambda+4 \\ 4\lambda=-4 \\ \lambda=-1 \end{array} \qquad \alpha = 1$

b) $\alpha(r y s)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V_r}\cdot\vec{V_s}}{|\vec{V_r}||\vec{V_r}|} = \frac{(3\cdot1+2\cdot2+1\cdot3)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = 5/7$$

$\vec{V_r} = (3,2,1)$

$\vec{V_s} = (1,2,3)$

$\alpha = 44'42°$

c) $\pi \begin{cases} r \\ s \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vec{V_r} = \vec{V_\pi} \\ \vec{V_s} = \vec{V_\pi} \\ O_s = O_\pi \end{array} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$6x + 6z + y - 2z - 2x - 9y = 0 \qquad \pi \equiv 4x - 8y + 4z = 0$

3

$C(0,0)$

$r=5$

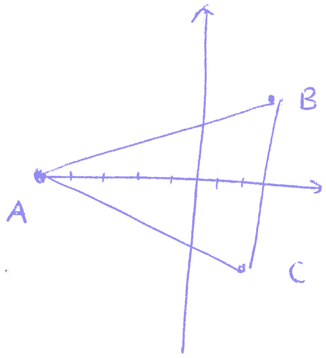
circunferencia

$A(-5,0)$

$B(x,y)$

$C(x,-y)$

triángulo



a) $x^2+y^2=5^2 \rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$

$A_t = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{25-x^2}\,(5+x)}{2} = \sqrt{25-x^2}\,(5+x)$

$b = d(\vec{BC}) = \sqrt{(x-x)^2+(-y-y)^2} = 2y = 2\sqrt{25-x^2}$

$h = +5+x$

b) $A'(x) = \frac{(-2x)}{2\sqrt{25-x^2}}(5+x) + \sqrt{25-x^2}\cdot 1 = \frac{-5x-x^2}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{25-x^2}{\sqrt{25-x^2}} = 0$

$-2x^2-5x+25=0$ $\quad x=5/2$

$x=-5 \rightarrow$ no sirve $\quad -5<x<5$

$+ \quad \underset{5/2}{|} \quad -$

$B\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad C\left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $A(5/2) = 32'476\ u^2$