

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2012	CONVOCATORIA: JUNIO 2012
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal triar només UNA dels dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma dels qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. **Es prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).**

**S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.**

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. **Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.**

### OPCIÓN A

**Problema A.1.** Se da el sistema de ecuaciones  $S: \begin{cases} 2x + \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)y + z = 1, \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$ , donde  $\alpha$  es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

- La solución del sistema  $S$  cuando  $\alpha = 0$ . (3 puntos).
- Todas las soluciones del sistema  $S$  cuando  $\alpha = -1$ . (4 puntos).
- El valor de  $\alpha$  para el que el sistema  $S$  es incompatible. (3 puntos).

**Problema A.2.** Se dan las rectas  $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$  y  $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros reales.

Calcular **razonadamente**:

- Las coordenadas del punto de corte de  $r_1$  y  $r_2$ . (3 puntos).
- La ecuación del plano que contiene esas dos rectas. (4 puntos).
- La distancia del punto  $(0, 0, 1)$  a la recta  $r_2$ . (3 puntos).

**Problema A.3.** Con el símbolo  $\ln x$  se representa el logaritmo de un número positivo  $x$  cuando la base del logaritmo es el número  $e$ . Sea  $f$  la función que para un número positivo  $x$  está definida por la igualdad

$$f(x) = 4x \ln x.$$

Obtener **razonadamente**:

- El valor de  $x$  donde la función  $f$  alcanza el mínimo relativo. (4 puntos).
- La ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 4x \ln x$  en el punto  $(1, 0)$ . (3 puntos).
- El área limitada entre las rectas  $y = 0$ ,  $x = e$  y  $x = e^2$  y la curva  $y = 4x \ln x$ . (3 puntos).

## OPCIÓN B

**Problema B.1.** Obtener razonadamente:

a) Todas las soluciones  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de la ecuación  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ . (4 puntos).

b) El determinante de una matriz cuadrada  $B$  de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación  $B^2 = B$ . (3 puntos).

c) El determinante de una matriz cuadrada  $A$  que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de  $A$  es positivo. (3 puntos).

**Problema B.2.** Se da la recta  $r$  de ecuación  $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $\pi: 2x + y + nz = p$ ,

donde  $n$  y  $p$  son dos parámetros reales.

Obtener razonadamente:

- Todos los valores de  $n$  para los que la intersección de la recta  $r$  y el plano  $\pi$  es un punto. (4 puntos).
- El valor de  $n$  y el valor de  $p$  para los que la recta  $r$  está contenida en el plano  $\pi$ . (3 puntos).
- El valor de  $n$  y todos los valores de  $p$  para los que la recta  $r$  no corta al plano  $\pi$ . (3 puntos).

**Problema B.3.** Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo  $T$  de vértices  $A = (0, 12)$ ,  $B = (-x, x^2)$  y  $C = (x, x^2)$ , siendo  $x^2 < 12$ .

Obtener razonadamente:

- El área del triángulo  $T$  en función de la abscisa  $x$  del vértice  $C$ . (2 puntos).
- Las coordenadas de los vértices  $B$  y  $C$  para que el área del triángulo  $T$  sea máxima. (3 puntos).

Para completar el escudo se añade al triángulo  $T$  de área máxima la superficie  $S$  limitada entre la recta  $y = 4$  y el arco de parábola  $y = x^2$ , cuando  $-2 \leq x \leq 2$ .

Obtener razonadamente:

- El área de la superficie  $S$ . (3 puntos).
- El área total del escudo. (2 puntos).

Junio 2012Opción A

①

$$\left. \begin{array}{l} 2x + \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)y + z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1 \end{array} \right\} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \end{array} \right)$$

A  
A'

$$|A| = 2\alpha^2 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^3 - 4 = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} -1 \quad 3 \quad 0 \quad -4 \\ -1 \quad 1 \quad -4 \quad 4 \\ -1 \quad 4 \quad -4 \quad 0 \\ 2 \quad -2 \quad 4 \quad - \\ -1 \quad 2 \quad 0 \\ 2 \quad -2 \\ -1 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{array}$$

a)  $\alpha = 0$   $\alpha \neq -1, 2$  rango  $A = 3$  rango  $A' = 3$  n° incógnitas = 3

SCD

$$|A| = -4 \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-10}{-4} = 5/2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -3/4 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = -3/4$$

b)  $\alpha = -1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_3 = F_2$$

rango  $A = 2$   
 rango  $A' = 2$       SCI  
 n° incógnitas = 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5-\lambda \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{array} \right)$$

$$z = \lambda$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{10-2\lambda}{4} = \frac{5-\lambda}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{4} = \frac{2-2\lambda-5+\lambda}{4} = \frac{-\lambda-3}{4}$$

c)  $\alpha = 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right| = -18$$

$\underline{\hspace{10em}}$   
 $A$   
 $\underline{\hspace{10em}}$   
 $A'$

rango  $A = 2$

rango  $A' = 3$

→ SI

n° incógnitas = 3

2

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$$

a)  $1 + 2\alpha = -1 \rightarrow \alpha = -1 \quad x = -1$   
 $\alpha = 1 + \beta \rightarrow \beta = -2 \quad y = -1$   
 $2 - \alpha = -1 - 2\beta \quad z = 3$   
 $\circlearrowleft (-1, -1, 3)$

b)  $\# \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \vec{V}_{\Gamma_1} = \vec{V}_{\Pi} = (2, 1, -1) \\ \vec{V}_{\Gamma_2} = \vec{V}_{\Pi} = (0, 1, -2) \end{array} \right| \begin{array}{l} x-1 \quad y-0 \quad z-2 \\ 2 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad 1 \quad -2 \end{array} \Big| = 0$   
 $A_{\Gamma_1} = (1, 0, 2)$

$$-2x + 2 + 2z - 4 + x - 1 + 4y = 0$$

$$\Pi \equiv -x + 4y + 2z - 3 = 0$$

c)  $d(C, \Gamma_2) = \frac{|\vec{BC} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 1 \text{ u.}$

$$C = (0, 0, 1)$$

$$B_{\Gamma_2} = (-1, 1, -1)$$

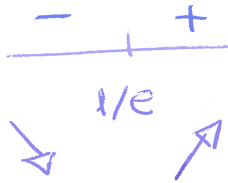
$$\vec{BC} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{V}_{\Gamma_2} = (0, 1, -2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{j} + \vec{k}$$

③  $f(x) = 4x \ln x$

a)  $f'(x) = 4 \ln x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4 \ln x + 4 = 0 \quad \ln x = -1 \quad x = \frac{1}{e}$



b)  $(1, 0) \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(1) = 4 \quad y - 0 = 4(x - 1)$

$y = 4x - 4$

c)  $y = 0$

$x = e$

$x = e^2$

$y = 4x \ln x$

$\int_e^{e^2} 4x \ln x \, dx = \int_e^{e^2} \underbrace{4x}_{dv} \underbrace{\ln x}_u \, dx = \int_e^{e^2} \ln x \cdot 2x^2 - \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$   
 $= \left[ \ln x \cdot 2x^2 - \frac{2x^2}{2} \right]_e^{e^2} =$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} \, dx$

$dv = 4x \, dx$

$v = \frac{4x^2}{2} = 2x^2$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$= \left[ \ln x \cdot 2x^2 - x^2 \right]_e^{e^2} = (4e^4 - e^4) - (2e^2 - e^2) = 3e^4 - e^2 = 156'4u^2$

Opción B

① a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rango A = 2  
Rango A' = 2  
n° incógnitas = 3

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

SCI

$$C_4 = C_3 + C_2 - C_1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad z = \lambda$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-2\lambda \\ 1 & 1 & 3-3\lambda \end{array} \right) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 0 \\ 3-3\lambda & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1-2\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2\lambda \\ 1 & 3-3\lambda \end{vmatrix}}{1} = 3-3\lambda-1+2\lambda = 2-\lambda$$

b)  $B_{2 \times 2}$   $|B|^2 = |B|$   $|B| = 0 \rightarrow$  no cumple la  
 $|B|$   $|B|^2 = |B|$  condición de que existe  $B^{-1}$ .  
 $B^2 = B$   $|B|^2 - |B| = 0$   $\boxed{|B| = 1}$   
 $|B|(|B| - 1) = 0$

c)  $|A|$

$A_{4 \times 4}$

$A^2 - 9I = 0$

$A^2 = 9I$

$|A^2| = |9I|$

$|A|^2 = 9^4 |I|$

$|A|^2 = 9^4$

$|A| = \pm 9^2$

$|A| = 81$

$|A| = -81$

2

$\Gamma \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$

$\Pi \equiv 2x + y + nz = p$

a) 
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \\ 2x + y + nz = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & n & p \end{array} \right) \\ \hline A \\ \hline A' \end{array}$$

$|A| = 5n - 2 + 4 + 20 + 1 + 2n = 7n + 23 = 0 \rightarrow n = -23/7$

Si  $n \neq -23/7$  el rango de  $A=3$ , el rango de  $A'=3$  y el número de incógnitas = 3, es un SCD, por lo tanto, tiene una única solución, es decir, la intersección entre el plano y la recta es un punto.

b)  $n = -23/7$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -23/7 & p \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & p-2 \end{array} \right| = 0 \quad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{array} \right| = 7$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & p & p \end{array} \right| = 5p + 1 - 10 + 2p = 7p - 9 = 0 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & +9/7 & -23/7 & p \end{array} \right| = 0$$

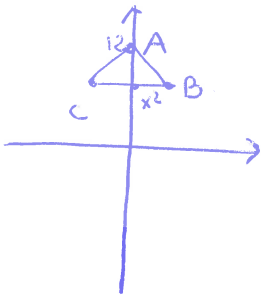
$p = 9/7 \rightarrow$  rango  $A =$  rango  $A' = 2 \rightarrow$  SCS  
 nº incógnitas = 3



Para estos valores el sistema tiene infinitas soluciones, por lo tanto la recta está contenida en el plano.

c)  $n = -23/7$  rango  $A = 2$   
 $p \neq 9/7$  rango  $A' = 3 \rightarrow SI \rightarrow$  no tiene solución, por  $n^\circ$  incógnitas = 3 lo tanto no se cortan.

③  $A(0, 12)$   
 $B(-x, x^2)$   
 $C(x, x^2)$   
 $x^2 < 12$



$$a) A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot x \cdot (12 - x^2)}{2} = \frac{24x - 2x^3}{2}$$

$$b = d(\overline{BC}) = \sqrt{(x - (-x))^2 + (x^2 - x^2)^2} =$$

$$= \sqrt{4x^2} = 2x$$

$$h = 12 - x^2$$

$$b) A'(x) = \frac{24 - 6x^2}{2} = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

El -2 no sirve  $0 < x < \sqrt{12}$

$B(-2, 4)$   $C(2, 4)$

$$y = 4$$

$$y = x^2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$c) \int_{-2}^2 x^2 - 4 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 = \left| -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$

$$A(2) = 16 u^2 \quad A_T = \frac{80}{3} u^2$$