PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2013	CONVOCATORIA: JULIO 2013
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Comprobar **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado** que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $AB = BA$, entonces se deduce que $A^2B^2 = (AB)^2$. (2 *puntos*).

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula, (4 *puntos*), y que una matriz A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ tiene matriz inversa. (2 *puntos*)

c) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = O$. (2 *puntos*).

Problema A.2. Se dan las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Unas ecuaciones implícitas de r_1. (2 *puntos*).

b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π, (2 *puntos*) y la ecuación de ese plano π. (2 *puntos*).

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R, siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2. (4 puntos).

Problema A.3. Se dan las funciones $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$. (4 *puntos*).

b) Los dominios de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (3 *puntos*).

c) La expresión simplificada de la función $f(x) + g(x)$, (1,5 *puntos*), y el recorrido de esta función $f(x) + g(x)$. (1,5 *puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1, \\ 3x & + & 5y & + & z & = & 1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. (4 *puntos*).
b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 *puntos*).
c) Los valores de α para los cuales el sistema es compatible determinado. (3 *puntos*).

Problema B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s: \{x - 1 = y - 2 = z$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 *puntos*).
b) La distancia entre las rectas r y s, (2 *puntos*), **justificando** que las rectas r y s se cruzan. (2 *puntos*).
c) Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s. (3 *puntos*).

Problema B.3. En el plano *XY* está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 40,$$ siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.

Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A, de manera que los vértices de R sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la parcela A. (3 *puntos*).
b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. (5 *puntos*).
c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*).

Julio 2013

Opción A

1

a) $AB = BA$ $\qquad A^2B^2 = (AB)^2$

$$A^2 \cdot B^2 = A \cdot A \cdot B \cdot B = ABAB = (AB)^2$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 - 3A + 2I = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A = 2I \qquad\qquad A \cdot A^{-1} = I$$

$$\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A = I \qquad\qquad A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I$$

$$A\left(\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I\right) = I$$

c) $A^3 = \alpha A + \beta I$

$A^2 - 3A + 2I = 0$

$A^2 = 3A - 2I$

$A^3 = A^2 \cdot A = (3A - 2I) \cdot A = 3A^2 - 2A$

$= 3(3A - 2I) - 2A = 9A - 6I - 2A$

$= 7A - 6I = \alpha A + \beta I \qquad \alpha = 7 \quad \beta = -6$

2

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$$

a) $r_1 \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-2}{-1} \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y \rightarrow \\ y = \dfrac{z-2}{-1} \rightarrow \end{cases} \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ -y - z + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\pi \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$

Determinamos la posición de las rectas: $\vec{v_{r_1}} = (2, 1, -1)$

$\vec{v_{r_2}} = (0, 1, -2)$

$A_{r_1} = (1, 0, 2)$

$B_{r_2} = (-1, 1, -1)$

$\vec{AB} = (-2, 1, -3)$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |M| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

rango $M = 2$ $\quad \vec{v_{r_1}} \neq \lambda \vec{v_{r_2}} \rightarrow$ son secantes y están contenidas en un mismo plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi \equiv -x+4y+2z-3=0$$

$$-2x+2+2z-4+x-1+4y=0$$

c) $A(PQR) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{14}/2 \; u^2$

$P(-1,0,1)$

$Q(0,1,2)$

$R(r_1\, y\, r_2) \rightarrow \begin{array}{l} 1+2\alpha=-1 \\ \alpha=1+\beta \\ 2-\alpha=-1-2\beta \end{array} \Bigg| \rightarrow \begin{array}{l} 2\alpha=-2 \rightarrow \alpha=-1 \\ \beta=-2 \end{array} \Bigg| \rightarrow R(-1,-1,3)$

$\vec{PQ}=(1,1,1) \qquad \vec{PR}=(0,-1,2)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i}-\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j} = 3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$$

3 $\quad f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad g(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

a) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} =$

$= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$

$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)}{2(1-x)}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{1-x^2}$

b) $\frac{1+x}{1-x} > 0 \leftarrow \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 0$

$1+x=0 \qquad 1-x=0$

$x=-1 \qquad x=1$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

$\text{Dom } f(x) = (-1, 1) = \text{Dom } g(x)$

c) $f(x)+g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \ln\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]$

$= \ln\left[\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right] = \ln 1 = 0 \qquad \text{Rec: } [f(x)+g(x)] = 0$

$x = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \rightarrow 2x = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \rightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \rightarrow$

$e^{2x} - ye^{2x} = 1+y \rightarrow e^{2x} - 1 = y + ye^{2x} \rightarrow e^{2x} - 1 = y(1+e^{2x})$

$\rightarrow y^{-1} = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}} \qquad 1+e^{2x} = 0 \qquad \text{Dom } [f(x)+g(x)] = \mathbb{R}$

$e^{2x} = -1$

$x = \nexists$

Opción B

1

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + y + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}_{A'}$$

$|A| = \alpha^2 + 5 + 3 - 3\alpha - 5\alpha - 1 = \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0$

$\alpha = 7 \quad \alpha = 1$

a) $\alpha = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

rango $A = 2$

rango $A' = 2$

nº incógnitas $= 3$

SCI

$C_4 = C_3 \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 48$

$z = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 7 & 1-\lambda \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 7 \end{vmatrix}}{48} = \frac{-6\lambda + 6}{48}$$

$$x = \frac{-\lambda + 1}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{48} = \frac{-\lambda + 1}{8}$$

b) $\alpha = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 = F_2$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2$

rango $A = 2$

rango $A' = 2$

nº incógnitas $= 3$

SCI

c) $\alpha \neq 1, 7$ rango $A = 3$ rango $A' = 3$ nº incógnitas $= 3$

SCD

2) $r = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ $\quad s = \{ x-1 = y-2 = z$

a) $x = \lambda$

$$\begin{array}{r} -y+z = -\lambda \\ y+z = 1-2\lambda \\ \hline 2z = 1-3\lambda \end{array}$$

$$z = \frac{1-3\lambda}{2}$$

$$y = 1-2\lambda - \frac{1-3\lambda}{2}$$

$$y = \frac{2-4\lambda-1+3\lambda}{2}$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

$A = (0, 1/2, 1/2)$

$\vec{v_r} = (1, -1/2, -3/2)$

$s = \; B = (1, 2, 0) \quad \vec{v_s}(1, 1, 1)$

b) $d(r,s)$

$$M = (\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s}) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M| = -7/2$$

$\vec{AB} = (1, 3/2, -1/2)$

rango $M = 3 \rightarrow$ r y s se cruzan

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|} = \frac{|-7/2|}{\sqrt{1^2 + (-5/2)^2 + (3/2)^2}} = \frac{+7/2}{\sqrt{19/2}} = \frac{7\sqrt{38}}{38} \, u$$

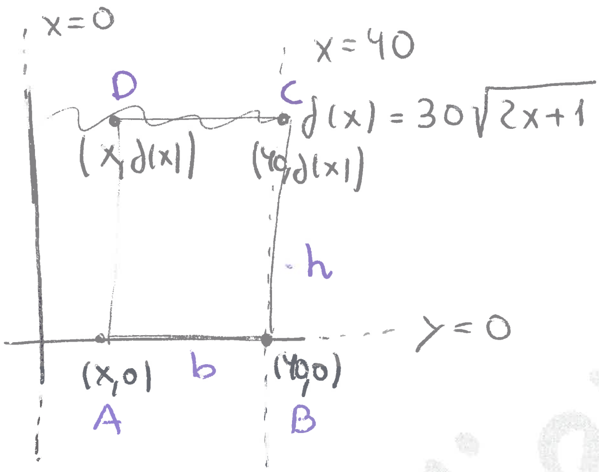
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{k} - \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} + \frac{3}{2}\vec{i} - \vec{j} =$$

$$= \vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

c) $t = \begin{cases} P\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right) \\ t \perp r \\ t \perp s \end{cases}$ $\quad \vec{v_t} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \left(1, -5/2, 3/2\right)$

$$t = \begin{cases} x = \lambda + 41/57 \\ y = -5/2\,\lambda - 14/57 \\ z = 3/2\,\lambda \end{cases}$$

3



$0 \le x \le 40$

$$\begin{cases} A(13, 0) \\ B(40, 0) \\ C(40, 90\sqrt{3}) \\ D(13, 90\sqrt{3}) \end{cases}$$

c) $A(13) = 4208'88\ u^2$

a) $A = b \cdot h$

$b = d(\vec{AB}) = \sqrt{(40-x)^2 + 0^2} = 40 - x$

$h = d(\vec{BC}) = \sqrt{(40-40)^2 + (0 - d(x))^2} = 30\sqrt{2x+1}$

$A(x) = (40-x) \cdot 30\sqrt{2x+1}$

b) $A'(x) = -1 \cdot 30\sqrt{2x+1} + (40-x) \cdot 30 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 =$

$= -30\sqrt{2x+1} + \frac{1200 - 30x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{-30(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1200 - 30x}{\sqrt{2x+1}} =$

$= \frac{-90x + 1170}{\sqrt{2x+1}} = 0 \qquad x = 13$

$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \nearrow & 13 & \searrow \end{array}$