GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, CULTURA I ESPORT

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2014	CONVOCATORIA: JULIO 2014
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 *puntos*) y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz S. (2 *puntos*). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz S sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. (1 *punto*).

b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que T es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz T. (3 *puntos*).

c) La solución a de la ecuación $\begin{vmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{vmatrix}$. (2 *puntos*).

Problema A.2. Se dan los puntos $A=(1,\ 5,\ 7)$ y $B=(3,\ -1,\ -1)$.
Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta r que pasa por los puntos A y B, sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto A y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A y B. (4 *puntos distribuidos en* 2 *puntos por cada plano*).

b) La distancia entre los planos π_1 y π_2. (2 *puntos*).

c) Las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos A y B, (2 *puntos*), y los puntos de la recta r que están a distancia 3 del punto $C=(1,\ 0,\ 1)$. (2 *puntos*).

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x)=xe^x-3x$.
Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con el eje X. (2 *puntos*).

b) El punto de inflexión de la curva $y=f(x)$, (2 *puntos*), así como la **justificación razonada** de que la función f es creciente cuando $x>2$. (2 *puntos*).

c) El área limitada por el eje X y la curva $y=f(x)$, cuando $0\le x\le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (1-\alpha)x+2y+z = 4 \\ x+y-2z = -4 \\ x+4y-(\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. (3 *puntos*).

b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*).

c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. (4 *puntos*).

Problema B.2. Se dan las rectas $r\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases}$ y $s\begin{cases} x+y = 8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Un vector director de cada recta (2 *puntos*) y la posición relativa de las rectas r y s. (2 *puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. (3 *puntos*).

c) La distancia entre las rectas r y s. (3 *puntos*).

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 *punto*).

b) El total que cobra la empresa VR si viajan $60+x$ pasajeros, siendo $0 \le x \le 20$. (4 *puntos*).

c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 *puntos*).

Julio 2014

Opción A

1

a) $S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad S^{-1} = \dfrac{S_{adj}^{T}}{|S|} = \begin{pmatrix} 1/10 & 13/20 & -3/20 \\ -3/10 & 11/20 & -1/20 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

$|S| = 20$

Para que una matriz posea inversa el determinante debe ser diferente de 0, porque algo dividido entre 0 es infinito.

$S_{adj} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ +13 & 11 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad S_{adj}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\left| (4(T^2))^{-1} \right| = \dfrac{1}{|4T^2|} = \dfrac{1}{4^3 |T|^2} = \dfrac{1}{4^3 \cdot 20^2} = \dfrac{1}{25600}$

T_{3x3}

$|T| = 20$

Propiedades $\begin{cases} |T^{-1}| = \dfrac{1}{|T|} \\ |T^n| = |T|^n \end{cases}$ $\quad |kT| = k^n |T| \quad T_{nxn}$

c) $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$

$a=a$

$a^2-1=a+1$

$a^2-a-2=0$

$\boxed{a=2}$

$a=-1$

$a+1=a^2-1$

$a^2-a-2=0$

$a^2+4=4a$

$a^2-4a+4=0$

$\boxed{a=2}$

$4a=a^2+4$

$a^2-4a+4=0$

2. $A=(1,5,7)$ $B=(3,-1,-1)$

a) $\pi_1 \perp r_{AB}$ y A

$\pi_2 \perp r_{AB}$ y $\frac{AB}{2}$

$r_{AB} \rightarrow \overrightarrow{AB}=(2,-6,-8) \rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda+1 \\ y=-6\lambda+5 \\ z=-8\lambda+7 \end{cases}$

$\pi \perp r \rightarrow \overrightarrow{V_r}=\overrightarrow{n_\pi}$

$2x-6y-8z+D=0 \xrightarrow[A]{} 2\cdot 1-6\cdot 5-8\cdot 7+D=0$

$D=84$

$\pi_1 \equiv 2x-6y-8z+84=0$

$\frac{AB}{2}=\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+(-1)}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right)=(2,2,3)$

$\longrightarrow 2\cdot 2-6\cdot(2)-8(3)+D=0$

$D=32$

$\pi_2 \equiv 2x-6y-8z+32=0$

b) $d(\pi_1 \text{ y } \pi_2) = \dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|84-(+32)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+(-8)^2}} = \dfrac{52}{\sqrt{104}} = \sqrt{26}\ u$

c) $r_{AB} \rightarrow$ Calculada en el apartado a)

$d(C, Q_r) = 3$ $\quad Q = (2\lambda+1, -6\lambda+5, -8\lambda+7)$

$C(1,0,1)$

$Q = ??$ $\quad d(C,Q) = \sqrt{(2\lambda)^2+(-6\lambda+5)^2+(-8\lambda+6)^2} = 3$

$4\lambda^2+36\lambda^2+25-60\lambda+64\lambda^2-96\lambda+36 = 9$

$104\lambda^2-156\lambda+52=0 \rightarrow \lambda=1 \quad \lambda=1/2$

$\begin{cases} Q=(3,-1,-1) & \lambda=1 \\ Q=(2,2,3) & \lambda=1/2 \end{cases}$

3 $\quad f(x) = xe^x - 3x$

a) $y=0$ $\quad 0 = x\cdot e^x - 3x$ $\quad (0,0)$

$0 = x(e^x-3)$ $\quad (\ln 3, 0)$

$0 = x$

$0 = e^x - 3$

$3 = e^x$

$\ln 3 = x$

b) $f'(x) = e^x + xe^x - 3$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x$

$f''(x) = e^x(2+x) = 0$

$e^x = 0 \rightarrow x = \nexists$

$2+x=0 \rightarrow x=-2$

$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline \searrow & \nearrow \end{array}$ $\quad -2$ $\quad (-2, 5'73)$

c) $\int_0^{\ln 3} xe^x - 3x \, dx = \int_0^{\ln 3} x \cdot e^x dx - \int_0^{\ln 3} 3x \, dx = \left[xe^x - e^x - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\ln 3} =$

$= 0'515 \; u^2$

$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int u dv = uv - \int v du$

Opción B

1

$$\left.\begin{array}{r} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha \end{array}\right)$$

A

A'

$$|A| = -(1-\alpha)(\alpha+1) + 4 - 4 - 1 + 8(1-\alpha) + 2(\alpha+1) =$$

$$= -1 + \alpha^2 - 1 + 8 - 8\alpha + 2\alpha + 2 = \alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0 \qquad \alpha = 4 \quad \alpha = 2$$

b) $\alpha \neq 2,4$ rango $A = 3$ rango $A' = 3$ nº incógnitas $= 3 \rightarrow$ SCD

a) $\alpha = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

A

A'

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -8 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -4$$

rango $A = 2$
rango $A' = 3$
nº incógnitas $= 3$
SI

c) $\alpha = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

rango $A = 2$
rango $A' = 2$
nº incógnitas $= 3$
SCI

$z = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4-\lambda \\ 1 & 1 & -4-2\lambda \end{array}\right)$$

$-4C_1 = C_4$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ 1 & -4-2\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4+2\lambda-4+\lambda}{-3} = \frac{3\lambda}{-3} = -\lambda$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -4-2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4-\lambda+8+4\lambda}{-3} = \frac{3\lambda+12}{-3} = -\lambda-4$$

2 $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x+y = 8 \\ x+y+z = 13 \end{cases}$

a) $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=10 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=8-\lambda \\ z=5 \end{cases}$ $\quad M(\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s})$

$\vec{v_r} = (1,1,0)$ $\quad \vec{v_s} = (1,-1,0)$

$A = (0,0,10)$ $\quad B = (0,8,5)$ $\quad \vec{AB} = (0,8,-5)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |M| = 10$$

rango $M = 3$ las rectas son $\rightarrow$ secantes.

b) $\pi \equiv \begin{cases} s & \vec{v_s} = \vec{v_\pi} = (1,-1,0) \quad B_s = B_\pi = (0,8,5) \\ // r & \vec{v_r} = \vec{v_\pi} = (1,1,0) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-8 & z-5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z-5+z-5=0 \rightarrow \pi \equiv 2z+10=0$$

c) $$d(r y s) = \frac{|\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s}|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|} = \frac{10}{\sqrt{0^2+0^2+2^2}} = 5 \ u$$

3

80 plazas

60 plazas reservadas → 800 €

↓10 € ↑1 pasajero

a) 61 → $(60+1)(800-10) = 48190$ €

70 → $(60+10)(800-10\cdot 10) = 49000$ €

80 → $(60+20)(800-10\cdot 20) = 48000$ €

b) $f(x) = (60+x)(800-10x)$ $\quad 0 \leq x \leq 20$

c) $f'(x) = (800-10x) + (60+x)(-10) =$

$= 800 - 10x - 600 - 10x = 0$

$200 = 20x$

10 viajeros $= x$

$+ \quad -$

$\nearrow \; 10 \; \searrow$