Julio 2016

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)

b) El valor del parámetro α para el que el sistema es incompatible. (3 *puntos*)

c) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado (2 *puntos*)
y obtener la solución del sistema en función del parámetro α. (2 *puntos*)

Problema A.2. Se dan los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (0, 1, -2)$ y $D = (1, 2, 0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C. (3 *puntos*)

b) La justificación de que los cuatro puntos A, B, C y D, no son coplanarios. (2 *puntos*)

c) La distancia del punto D al plano π, (2 *puntos*)
y el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa al valor absoluto de x. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. (2 *puntos*)

b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. (1 *puntos*)

c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, (2 *puntos*)
y el extremo relativo de la función f, justificando si es máximo o mínimo relativo. (1 *puntos*)

d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$. (1 *puntos*)

e) Las integrales definidas $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)dx$. (1,5 + 1,5 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El determinante de las matrices $A\cdot(2(B)^2)$ (1,5 *puntos*)
   y $A\cdot(2(B)^2)\cdot(3A)^{-1}$. (1,5 *puntos*)

b) Las matrices A^{-1} (2 *puntos*)
   y $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$. (2 *puntos*)

c) La solución de la ecuación matricial $A\cdot X+B\cdot X=3I$. (3 *puntos*)

Problema B.2. Se dan los planos $\pi: x+y+z=1$ y $\sigma: ax+by+z=0$, donde a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los que el plano σ pasa por el punto $(1,\ 2,\ 3)$ y, además, dicho plano σ es perpendicular al plano π . (3 *puntos*)

b) Los valores de a y b para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto $(0,\ 1,\ 1)$ y la distancia del punto $(1,0,1)$ al plano σ es 1. (3 *puntos*)

c) Los valores de a y b para los que la intersección de los planos π y σ es la recta r para la que el vector $(3,\ 2,-5)$ es un vector director de dicha recta r, (3 *puntos*)
   y obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r. (1 *punto*)

Problema B.3. La diferencia de potencial x entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad y, que está relacionada con la diferencia de potencial x por la ecuación $y=-x^2-x+6$, siendo $0\le x\le 2$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La gráfica de la función $f(x)=-x^2-x+6$ (3 *puntos*)
   y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad y cuando la diferencia de potencial x es 0 y el valor de la diferencia de potencial x al que corresponde una intensidad y igual a 0, siendo $0\le x\le 2$. (1 *punto*)

b) El valor de la diferencia de potencial x para el que es máximo el producto $y\cdot x$ de la intensidad y por la diferencia de potencial x, cuando $0\le x\le 2$, (2 *puntos*)
   y obtener el valor máximo de dicho producto $y\cdot x$, cuando $0\le x\le 2$. (1 *punto*)

c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y=f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. (3 *puntos*)

Julio 2016

Opción A

1

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+\alpha y-5z=-4 \end{array}\right\}$$

a) $\alpha=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

A ; A'

$|\Delta| = -27$

rango $A=3$
rango $A'=3$
nº incógnitas $=3$ → SCD

$$x=\frac{|\Delta x|}{|\Delta|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{26}{27} \qquad z=\frac{|\Delta z|}{|\Delta|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{32}{27}$$

$$y=\frac{|\Delta y|}{|\Delta|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-27}=-\frac{4}{3}$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & \alpha & -5 & -4 \end{array}\right)$$

A ; A'

$|\Delta| = -27-9\alpha=0$

$\alpha=-3$

Si $\alpha\neq -3$ rango $A=3$
rango $A'=3$
nº incógnitas $=3$

↓

SCD

$\alpha = -3 \rightarrow SI$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

rango $A = 2$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2+3 = 5$

rango $A' = 3$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 4$

nº incógnitas $= 3$

c)

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & \alpha & -5 \end{vmatrix}}{-27-9\alpha} = \frac{-26-10\alpha}{-27-9\alpha} = \frac{10\alpha+26}{9\alpha+27}$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-27-9\alpha} = \frac{36}{-9\alpha-27} = \frac{4}{\alpha-3}$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & \alpha & -4 \end{vmatrix}}{-27-9\alpha} = \frac{-32-4\alpha}{-27-9\alpha} = \frac{4\alpha+32}{9\alpha+27}$$

2 $\quad A = (0,0,1) \quad B = (1,0,-1) \quad C = (0,1,-2) \quad D = (1,2,0)$

a) $\pi \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (1-0, 0-0, -1-1) = (1,0,-2)$

$\overrightarrow{AC} = (0-0, 1-0, -2-1) = (0,1,-3)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$z - 1 + 2x + 3y = 0 \longrightarrow 2x + 3y + z - 1 = 0 \equiv \pi$

b) Para que sean coplanarios se debe cumplir $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (1, 2, -1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 6 = 7 \neq 0 \rightarrow \text{no son coplanarios}$$

c) $d(D, \pi) = ?$ $\qquad V_{tetraedro}(\Delta BCD)$

$$d(D,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u$$

$$V_{tetraedro}(\Delta BCD) = \frac{1}{6}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 7/6\ u^3$$

3 $f(x) = x^2 + |x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$y = 0$: $0 = x^2 - x$
$0 = x(x-1)$
$0 = x$
$1 = x \rightarrow$ no pertenece

$y = 0$: $0 = x^2 + x$
$0 = x$
$-1 = x \rightarrow$ no pertenece.

$x = 0 \quad y = 0 \quad (0,0)$

b) $f(-x) = (-x^2) + |-x| = x^2 + |x| \rightarrow f(-x) = f(x)$

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \rightarrow$ no pertenece

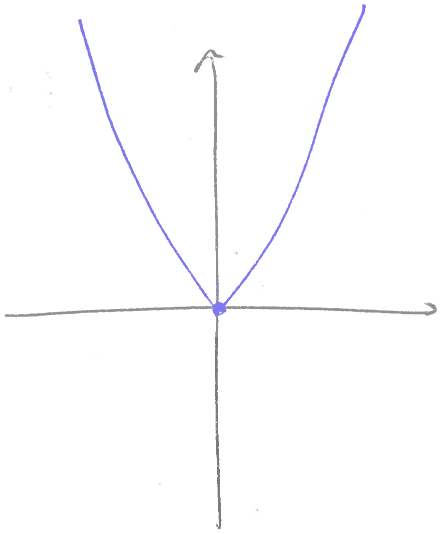
$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/2 \rightarrow$ no pertenece.

$-\quad +$
$\searrow\ 0\ \nearrow$

Decrece: $(-\infty, 0)$ $\qquad$ $min_r\ (0,0)$

Crece: $(0, +\infty)$

d)



e) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 - x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 5/6\ u^2$

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x^2 + x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 14/3\ u^2$

Opción B

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |A| = -1 \\ |B| = 5 \end{matrix}$$

a) $$\left| A\left(2\,(B^2)\right) \right| = |A| \cdot 2^3 |B|^2 = -1 \cdot 8 \cdot 5^2 = -200$$

$$\left| A\left(2(B)^2\right) \cdot (3A)^{-1} \right| = \cancel{|A|} \cdot 2^3 |B|^2 \cdot \frac{1}{3^3 \cancel{|A|}} = 200/27$$

b) $A^{-1} = ?$ $\quad \left((BA)^{-1} \cdot B\right)^{-1} = ?$

$$A^{-1} = \frac{A^T_{adj}}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left((BA)^{-1} \cdot B\right)^{-1} = B^{-1}\left((BA)^{-1}\right)^{-1} = B^{-1} \cdot B \cdot A = A$$

propiedades:
$$\begin{cases} X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I \\ (XY)^{-1} = X^{-1} Y^{-1} \\ (X^{-1})^{-1} = X \end{cases}$$

c) $AX + BX = 3I$

$(A+B)X = 3I$

$X = (A+B)^{-1} \cdot 3I$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A+B| = 3$

$$(A+B)_{adj} = \begin{pmatrix} -3 & +3 & 0 \\ -2 & 2 & +1 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A+B)^T_{adj} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A+B)^{-1} \cdot 3I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2) $\pi \equiv x+y+z=1 \qquad \sigma \equiv ax+by+z=0$

a) $\sigma \begin{cases} A(1,2,3) \rightarrow a+2b+3=0 \\ \sigma \perp \pi \rightarrow \vec{V_\sigma} \cdot \vec{V_\pi} = 0 \end{cases}$

$\vec{n_\sigma} = (a, b, 1)$

$\vec{n_\pi} = (1, 1, 1)$

$\vec{n_\sigma} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow a+b+1=0$

$$\begin{array}{r} a+2b+3=0 \\ a+b+1=0 \\ \hline / \quad b+2=0 \end{array}$$

$b=-2$

$a=1$

b) $\sigma \begin{cases} A(0,1,1) \quad b+1=0 \rightarrow \boxed{b=-1} \\ d(B,\sigma)=1 \\ B(1,0,1) \end{cases}$

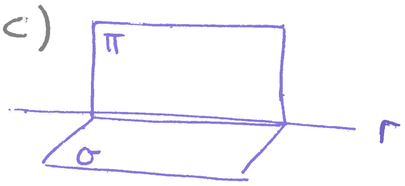
$$d(A,\sigma) = \frac{|AP_1 + BP_2 + CP_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{a^2+b^2+1^2}}$$

$$= \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+2}} = 1$$

$\frac{a+1}{\sqrt{a^2+2}} = 1 \rightarrow (a+1)^2 = (\sqrt{a^2+2})^2 \rightarrow a^2+2a+1 = a^2+2 \rightarrow \boxed{a = 1/2}$

$\frac{a+1}{\sqrt{a^2+2}} = -1 \rightarrow (a+1)^2 = (-\sqrt{a^2+2})^2 \rightarrow a^2+2a+1 = a^2+2$

c)



$\vec{v}_r = (3,2,-5)$ $\qquad \vec{n_\pi} = (1,1,1)$

$\vec{v}_r = \vec{n_\pi} \times \vec{n_\sigma}$ $\qquad \vec{n_\sigma} = (a,b,1)$

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+z=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + b\vec{k} + a\vec{j} - a\vec{k} - b\vec{i} - \vec{j}$$

$$= (1-b)\vec{i} + (a-1)\vec{j} + (b-a)\vec{k} = (3,2,-5)$$

$1-b=3 \rightarrow b=-2$

$a-1=2 \rightarrow a=3$

$b-a=-5$

$P\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases} \qquad x=0 \qquad \begin{array}{r} y+z=1 \\ -2y+z=0 \\ \hline 3y=1 \end{array} \qquad z = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$y = 1/3$

3 $\quad y = -x^2 - x + 6 \qquad 0 \leq x \leq 2$

a) • Puntos de corte: $x=0 \quad y=6 \quad (0,6)$

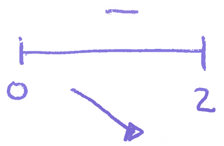
$y=0 \quad 0=-x^2-x+6 \quad (2,0)$

$x=2$

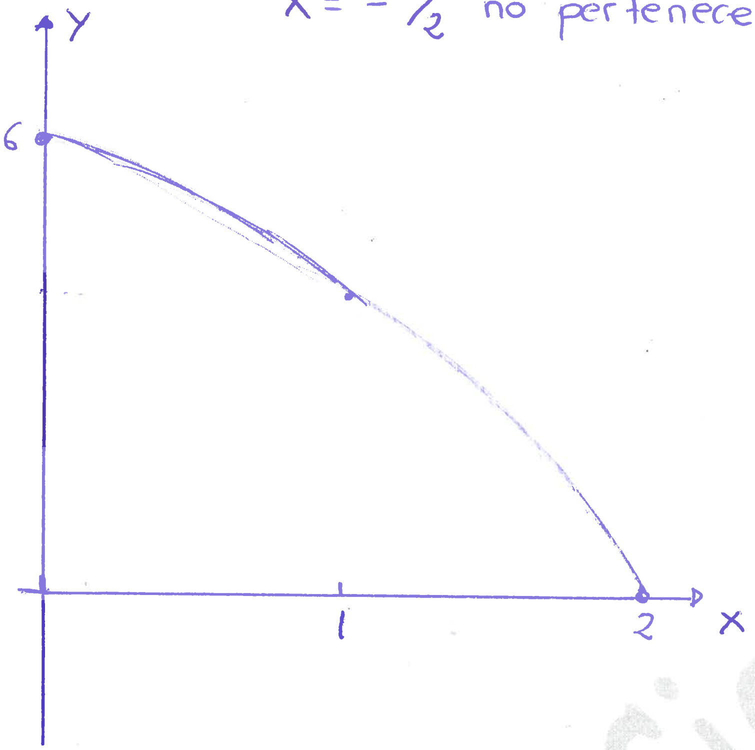
$x=-3$ no pertenece

• No tiene asíntotas

• $g'(x) = -2x - 1 = 0$



$x = -1/2$ no pertenece

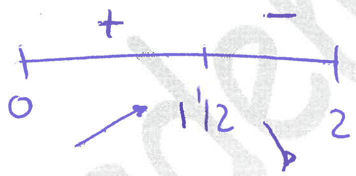


• Cuando $x=0$, la intensidad $y=6$

$y=0$, la diferencia de potencial $x=2$

b) $f(x) = y \cdot x = (-x^2 - x + 6) \cdot x = -x^3 - x^2 + 6x$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} = 1'12$



$x = \dfrac{-1-\sqrt{19}}{3} = -1'79 \to$ no pertenece

$f(x) = 4'06$

c) $\displaystyle\int_0^2 -x^2 - x + 6\,dx = \left|\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2\right| = 22/3\ u^2$