

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2013

CONVOCATORIA: JULIO 2013

MATEMÀTIQUES II

MATEMÁTICAS II

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).

S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

### OPCIÓN A

**Problema A.1.** Comprobar razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado que:

- a) Si el producto de dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  es conmutativo, es decir que  $AB = BA$ , entonces se deduce que  $A^2B^2 = (AB)^2$ . (2 puntos).

- b) Que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$  satisface la relación  $A^2 - 3A + 2I = O$ , siendo  $I$  y  $O$ ,

respectivamente, las matrices de orden  $3 \times 3$  unidad y nula, (4 puntos), y que una matriz  $A$  tal que  $A^2 - 3A + 2I = O$  tiene matriz inversa. (2 puntos)

- c) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $A^3 = \alpha A + \beta I$ , sabiendo que la matriz  $A$  verifica la igualdad  $A^2 - 3A + 2I = O$ . (2 puntos).

**Problema A.2.** Se dan las rectas  $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$  y  $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros reales.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Unas ecuaciones implícitas de  $r_1$ . (2 puntos).  
 b) La justificación de que las rectas  $r_1$  y  $r_2$  están contenidas en un plano  $\pi$ , (2 puntos) y la ecuación de ese plano  $\pi$ . (2 puntos).  
 c) El área del triángulo de vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , siendo  $P = (-1, 0, 1)$ ,  $Q = (0, 1, 2)$  y  $R$  el punto de intersección de  $r_1$  y  $r_2$ . (4 puntos).

**Problema A.3.** Se dan las funciones  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  y  $g(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . Obtener razonadamente,

escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las derivadas de  $f(x)$  y  $g(x)$ . (4 puntos).  
 b) Los dominios de definición de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . (3 puntos).  
 c) La expresión simplificada de la función  $f(x) + g(x)$ , (1,5 puntos), y el recorrido de esta función  $f(x) + g(x)$ . (1,5 puntos).

## OPCIÓN B

**Problema B.1.** Se da el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$$
 donde  $\alpha$  es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Todas las soluciones del sistema cuando  $\alpha = 7$ . (4 puntos).
- Los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 puntos).
- Los valores de  $\alpha$  para los cuales el sistema es compatible determinado. (3 puntos).

**Problema B.2.** Se dan las rectas  $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$  y  $s: \{x - 1 = y - 2 = z\}$ . Obtener **razonadamente,**

**escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 puntos).
- La distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ , (2 puntos), **justificando** que las rectas  $r$  y  $s$  se cruzan. (2 puntos).
- Obtener unas ecuaciones de la recta  $t$  que pasa por el punto  $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$  y es perpendicular a las rectas  $r$  y  $s$ . (3 puntos).

**Problema B.3.** En el plano  $XY$  está dibujada una parcela  $A$  cuyos límites son dos calles de ecuaciones  $x = 0$  y  $x = 40$ , respectivamente, una carretera de ecuación  $y = 0$ , y el tramo del curso de un río de ecuación

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 40, \text{ siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.}$$

Se pretende urbanizar un rectángulo  $R$  inscrito en la parcela  $A$ , de manera que los vértices de  $R$  sean los puntos  $(x, 0)$ ,  $(x, f(x))$ ,  $(40, f(x))$  y  $(40, 0)$ .

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El área de la parcela  $A$ . (3 puntos).
- Los vértices del rectángulo  $R$  al que corresponde área máxima. (5 puntos).
- El valor de dicha área máxima. (2 puntos).