Junio 2016

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax & & - z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x & & + z = 2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

c) La solución del sistema cuando $a=-1$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha - 2 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta paralela a r que pasa por el punto $(0,1,0)$. (3 *puntos*)

b) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s. (3 *puntos*)

c) La distancia entre las rectas r y s. (4 *puntos*)

Problema A.3. Se da la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dominio y asíntotas de la función *f*. (2 *puntos*)

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*. (3 *puntos*)

c) La integral $\int f(x)\,dx$. (3 *puntos*)

d) El valor de $a>4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=4$ y $x=a$ es $\ln(3/2)$. (2 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (4 *puntos*)

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 *puntos*)

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. (3 *puntos*)

Problema B.2. Se da el plano $\pi : 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ y los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos A, B y C, (2 *puntos*)
y la posición relativa de los planos σ y π. (2 *puntos*)

b) El área del triángulo de vértices A, B y C. (3 *puntos*)

c) Un punto P del plano π y el volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema B.3. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y = \frac{23-5x}{10-x}$, siendo $0 < x < \frac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x. (3 *puntos*)

b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. (5 *puntos*)

d) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. (2 *puntos*)

Junio 2016

Opción A

1

$$\left.\begin{array}{l} ax \qquad -z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x \qquad + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A, A'

$|\Delta| = a^2 + 2a = 0$

$a(a+2) = 0$

$a = 0 \qquad a = -2$

- Si $a \neq 0, -2$ rango $A = 3$, rango $A' = 3$, nº incógnitas $= 3 \rightarrow$ SCD

a) • Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

rango $A = 2$
rango $A' = 3$ $\rightarrow$ SI
nº incógnitas $= 3$

b) • Si $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{array}\right)$$

rango $A = 2$
rango $A' = 2$ $\rightarrow$ SCI $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1/2 \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$
nº incógnitas $= 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2+2\lambda \\ -2 & 1 & 1-2\lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow z = 2 - 2\lambda \\ \rightarrow -2y + 2 - 2\lambda = 1 - 2\lambda \rightarrow y = 1/2 \end{array}$$

c) $a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A, A'

$|\Delta| = a^2 + 2a = -1$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 1$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = 0 \qquad y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 1$$

2

$$r:\begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases} \qquad s=\begin{cases} x= 1 \\ y= 2\alpha \\ z= \alpha-2 \end{cases}$$

a) $t\begin{cases} t /\!/ r \\ A(0,1,0) \end{cases} \quad \vec{v}_t=\vec{v}_r$

$r \equiv \; x=\lambda \rightarrow \begin{array}{l} -2y+z=-3-\lambda \\ y-z=-1-3\lambda \\ \hline -y \quad =-4-4\lambda \end{array}$

$y=4+4\lambda$

$z=-3-\lambda+8+8\lambda$

$z=7\lambda+5$

$$r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=4\lambda+4 \\ z=7\lambda+5 \end{cases}$$

$$t=\begin{cases} x= \lambda \\ y= 4\lambda+1 \\ z= 7\lambda \end{cases}$$

b) $\pi\begin{cases} r \quad A_r(0,4,5) \quad \vec{V}_\pi=\vec{V}_r=(1,4,7) \\ \pi /\!/ s \quad \vec{V}_s=\vec{V}_\pi=(0,2,1) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z-5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & +4 & +7 \end{vmatrix}=$$

$\pi\equiv -10x-y+2z-6=0$

c) $d(r,s)=\dfrac{|[\vec{PP'},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\dfrac{20}{\sqrt{105}}\,u$

$\vec{u}=\vec{v}_r=(1,4,7)$

$\vec{v}=\vec{V}_s=(0,2,1)$

$P_r=(0,4,5)$

$P'_s=(1,0,-2)$

$\vec{PP'}=(1,-4,-7)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-20$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4\vec{i}+2\vec{k}-14\vec{i}-\vec{j}=(-10,-1,2)$$

$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-10)^2+(-1)^2+2^2}=$

3 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

a) $x^2-5x+6=0$

$x=3$
$x=2$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2,3\}$

$\underline{AV} \to x=2$ y $x=3$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$

$\underline{AH} \to y=0$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$\underline{AO} \to$ no tiene

b) $f'(x) = \dfrac{-(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} = 0 \to x = 5/2$

$$\begin{array}{c|c} + & - \\ \hline \nearrow \quad 5/2 & \searrow \end{array}$$

Crece: $(-\infty, 5/2)$ decrece: $(5/2, +\infty)$

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}\,dx =$

$\displaystyle = \int \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}dx = \int \frac{Ax+Bx-2A-3B}{(x-3)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}\,dx =$

$A+B=0 \to A=-B=1$
$-2A-3B=1 \to -2(-B)-3B=1$
$B=-1$

$= \ln(x-3) - \ln(x-2) + C$

d) $\int_4^a f(x) = \ln 3/2$

$$\left[\ln(a-3) - \ln(a-2)\right] - \left[\ln(4-3) - \ln(4-2)\right] = \ln 3/2$$

$$\ln (a-3)/(a-2) + \ln 2 = \ln 3/2$$

$$\ln (a-3)/(a-2) = \ln 3/2 - \ln 2$$

$$\ln (a-3)/(a-2) = \ln 3/4$$

$$(a-3)/(a-2) = 3/4$$

$$4(a-3) = 3(a-2)$$

$$4a - 12 = 3a - 6$$

$$a = 6$$

Opción B

1) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} A \cdot A^{-1} = A \cdot 5^{-1} \cdot A^t \\ 5I = A \cdot A^t \end{cases} \leftarrow$ También podéis resolverlo por este camino

a) $A^{-1} = 5^{-1} A^t$ $\quad |A| = \sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

$A_{adj} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 0 & +2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \rightarrow A^T_{adj} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{A^T_{adj}}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 5^{-1} \cdot A^t = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) $A - \lambda I \rightarrow$ no tiene inversa.

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$|B| = (\sqrt{5}-\lambda)(1-\lambda)^2 + 4(\sqrt{5}-\lambda) = (\sqrt{5}-\lambda)[(1-2\lambda+\lambda^2)+4] =$

$= (\sqrt{5}-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0 \rightarrow \sqrt{5}-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \sqrt{5}$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = \nexists$

No tiene inversa para $\lambda = \sqrt{5}$.

c) $B^{-1} = B^{t}$ $|B| > 0$

$|B^{-1}| = |B^{t}|$ $|B| = 1$

$\frac{1}{|B|} = |B|$ Propiedades: $\begin{cases} |A^{t}| = |A| \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{cases}$

$1 = |B|^2$

$\pm 1 = |B|$

2 $\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ $A = (1,0,0)$ $B = (0,2,0)$ $C = (0,0,3)$

a) $\sigma \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$ $\vec{u}_\sigma = \vec{AB} = (0-1, 2-0, 0-0) = (-1,2,0)$
$\vec{v}_\sigma = \vec{AC} = (-1,0,3)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$6x - 6 + 2z + 3y = 0 \rightarrow \sigma \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

Para estudiar la posición relativa entre dos planos:

$\frac{6}{6} = \frac{3}{3} = \frac{2}{2} \neq \frac{-12}{-6} \rightarrow$ paralelos σ y π.

b) $A_{\text{triángulo}(ABC)} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{49} = 7/2 \ u^2$

$\vec{u} = \vec{AB}$
$\vec{v} = \vec{AC}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{k} + 3\vec{j}$$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}$

$=$

c) $P_\pi\,(x=0,\ y=0,\ z=6) \to (0,0,6)$

$V_{tetraedro}(P,A,B,C) = \frac{1}{6}\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1\ u^3$

$\vec{PA} = (1,0,-6)$

$\vec{PB} = (0,2,-6)$

$\vec{PC} = (0,0,-3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

3

$x \to$ baja calidad $\qquad y = \dfrac{23-5x}{10-x} \qquad 300\ €$

$y \to$ alta calidad $\qquad 0 < x < 23/5 \qquad 900\ €$

a) $f(x) = 300x + 900y = 300x + \dfrac{20700 - 4500x}{10-x} =$

$\dfrac{3000x - 300x^2 + 20700 - 4500x}{10-x} = \dfrac{-300x^2 - 1500x + 20700}{10-x}$

b) $f'(x) = \dfrac{(-600x - 1500)(10-x) - (-300x^2 - 1500x + 20700)(-1)}{(10-x)^2} =$

$= \dfrac{-6000x + 600x^2 - 15000 + 1500x - 300x^2 - 1500x + 20700}{(10-x)^2} =$

$\dfrac{300x^2 - 6000x + 5700}{(10-x)^2} = 0 \qquad x = 19 \qquad x = 1$

$0 \quad + \quad 1 \quad - \quad 23/5$

$x = 1\ T$

$y = 18/9 = 2\ T$

c) $f(1) = 2100\ €$